Langevin-Gleichungen mit nichtlinearer Reibung

Jörn Dunkel[1], Stefan Hilbert[2], and Peter Hänggi[1]

[1] Institut für Physik, Universität Augsburg, Universitätsstrasse 1, 86135 Augsburg
[2] Max-Planck-Institut für Astrophysik, Karl-Schwarzschild-Strasse 1, 85741 Garching

Zusammenfassung Es werden ausgewählte Anwendungsbeispiele für Langevin-Gleichungen mit nichtlinearen Reibungs- und (Geschwindigkeits-)Diffusionskoeffizienten diskutiert. Neben dem Konzept der aktiven Brownschen Bewegung, sollen dabei insbesondere die Erzeugung quasi-quantenmechanischer Geschwindigkeitsverteilungen sowie relativistische Brownschen Bewegungen im Mittelpunkt stehen.

1 Einleitung

Stochastische Differentialgleichungen (SDGen), in der Physik oftmals auch als Langevin-Gleichungen bezeichnet, stellen eine wichtige Möglichkeit zur Modellierung quasi-kontinuierlicher Diffusionsprozesse dar [1,2]. Ihr Anwendungsgebiet umfaßt u. a. ökonomische und finanzmathematische Problemstellungen [3,4], die Beschreibung von Reaktionsvorgängen in der physikalischen Chemie [5,6], die stochastische Bewegung einzelner Teilchen in einem fluktuierenden Medium oder auch numerische Optimierungsverfahren [7,8,9]. Neben der quantitativen Beschreibung derartiger Prozesse hat das Studium von Langevin-Gleichungen zur Entdeckung und zum Verständnis neuartiger Phänomene wie beispielsweise dem Effekt der Stochastischer Resonanz [10] beigetragen.

Das Anliegen des vorliegenden Beitrags besteht darin, einen kurzen Überblick über ausgewählte Anwendungsbeispiele von Langevin-Gleichungen zu geben. Dabei sollen insbesondere auch Arbeiten von W. Ebeling im Vordergrund stehen. Nach einer kurzen Zusammenfassung allgemeiner Aspekte aus der Theorie der SDGen in Abschnitt 2 wird im Teilabschnitt 3.1 das von Ebeling, Schweitzer und Tilch [11,12,13,14] entwickelte Depotmodell der aktiven Brownschen Bewegung diskutiert. Daran anschließend erläutern wir in Abschnitt 3.2 eine auf W. Ebeling zurückgehende Idee [15], die es erlaubt, mittels geschickter Wahl von Reibungskoeffizienten in der Langevin-Gleichung (klassische) Teilchen mit Bose-Einstein bzw. Fermi-Thomas-Geschwindigkeitsverteilungen zu modellieren. Zum Abschluß sollen dann noch kurz zwei mögliche Verallgemeinerungen [16,17,18,19,20] der klassischen Brownschen Bewegung [21,22] im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie [23,24] vorgestellt werden (Abschnitt 3.3).

2 Allgemeine Vorbemerkungen zu Langevin-Gleichungen

Als Ausgangspunkt betrachten wir eine eindimensionale Langevin-Gleichung[1] für die Koordinate $y(t)$ in der Form [1,6]

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a(y) + b_\eta(y)\, L(t). \tag{1}$$

Dabei seien die Koeffizientenfunktionen a und b vorgegeben, und die stochastische Langevin-Kraft $L(t)$ soll einer standardisierten Brownschen Bewegung entsprechen, also für jeden Zeitschritt $[t, t + \mathrm{d}t]$ der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\mathcal{P}[L(t)] = \left(\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{\mathrm{d}t}{2} L(t)^2\right] \tag{2}$$

genügen („weißes Rauschen"). Insbesondere gilt dann

$$\langle L(t)\rangle = 0, \qquad \langle L(t)L(t')\rangle = \delta(t - t'), \tag{3}$$

wobei für die zweite Gleichung der Grenzfall $\mathrm{d}t \to 0$ angenommen wurde.

Bei gegebener Gl. (1) ist man im Rahmen der probabilistischen Beschreibung an der zeitlichen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(t, y)$ interessiert. Allgemein ist dazu noch eine Diskretisierungsvorschrift für den Koeffizienten b in Gl. (1) zu fixieren (*Diskretisierungsdilemma*). Parametrisiert man mögliche Diskretisierungen gemäß

$$b_\eta(y) = b(\eta\, y(t) + (1 - \eta)\, y(t + \mathrm{d}t)), \qquad \eta \in [0, 1], \tag{4}$$

so ergeben sich in Abhängigkeit von η folgende Varianten der Fokker-Planck-Gleichung (FPG)

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\partial}{\partial y}\left[-a(y)\, f + \frac{1}{2}\, b(y)^{2(1-\eta)} \frac{\partial}{\partial y}\left[b(y)^{2\eta} f\right]\right\}. \tag{5}$$

In dieser Notation entspricht $\eta = 0$ der sogenannten Hänggi-Klimontovich-Vorschrift [25,26,27,28], $\eta = 1/2$ der Fisk-Stratonovich-Diskretisierung [29,30,31] und $\eta = 1$ der Ito-Diskretisierung [32,33]. Die stationären Lösungen der FPG (5) lauten

$$f_s(y) = \frac{C}{b(y)^{2\eta}} \exp\left[2 \int \mathrm{d}y\, \frac{a(y)}{b(y)^2}\right], \tag{6}$$

wobei sich die Normierungskonstante C aus der Bedingung

$$1 = \int \mathrm{d}y\ f_s(y) \tag{7}$$

[1] Die Verallgemeinerung auf mehrdimensionale Prozesse ergibt sich problemlos; siehe [1] und auch Abschnitt 3.

ergibt.

Desweiteren ist zu beachten, daß im Fall $\eta \neq 1/2$ Abweichungen von den üblichen Regeln des Differentialkalküls auftreten: Beispielsweise ergibt sich für eine hinreichend oft differenzierbare Funktion $z = g(y)$ mit Umkehrung $y = g^{-1}(z)$ die transformierte Langevin-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \tilde{a}(z) + \tilde{b}_\eta(z)\ L(t) \tag{8a}$$

mit abgeleiteten Koeffizienten (wobei $g' \equiv \mathrm{d}g/\mathrm{d}y$)

$$\tilde{a}(z) = g'(y)\ a(y) + \left(\eta - \frac{1}{2}\right) g''(y)\ b(y)^2, \tag{8b}$$

$$\tilde{b}(y) = g'(y)\ b(y). \tag{8c}$$

Beispiel: Lineare Brownsche Bewegung. Wir setzen speziell

$$y := p = mv, \qquad a := -\nu_0 y = -\nu_0 p, \qquad b := \sqrt{2D} = konst., \tag{9}$$

und interpretieren m als Masse und $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ als Geschwindigkeit eines Brownschen Teilchens. Die Stokessche Reibungskonstante $\nu_0 > 0$ entspricht einer inversen Relaxations- bzw. Bremszeit, während die Rauschamplitude $D > 0$ die Stärke der Fluktationen im umgebenen Medium parametrisiert. In diesem Fall ergibt sich unabhängig von der Diskretisierungsregel als stationäre Lösung die Maxwell-Verteilung

$$f_s(p) = \left(\frac{\nu_0}{2\pi D}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\nu_0 p^2}{2D}\right). \tag{10}$$

Den Bezug zur Gleichgewichtsthermodynamik erhält man vermöge der Einstein-Relation

$$k_B T = \frac{D}{m\nu_0}, \tag{11}$$

wobei T die Temperatur und k_B die Boltzmann-Konstante bezeichnet.

3 Anwendungsbeispiele

Es sollen nun explizite Anwendungsbeispiele zur nichtlinearen Brownschen Bewegung diskutiert werden. Im Mittelpunkt stehen dabei verschiedene Arbeiten von W. Ebeling et al. zur aktiven Brownschen Bewegung [2,11,12,13,14,34,35] sowie zu kanonisch-dissipativen Systemen [15]. Abschließend werden dann noch kurz neuere Entwicklungen zur relativistischen Brownschen Bewegung [16,17,18,19] angesprochen.

3.1 Aktive Brownsche Bewegung

Bei der herkömmlichen „passiven“ Brownschen Bewegung [21,22] relaxiert die Geschwindigkeitsverteilung eines Teilchen durch Stöße mit der Umgebung zu einer Maxwell-Verteilung[2]. Im Gegensatz dazu befaßt sich die Theorie der aktiven Brownschen Bewegung mit dissipativen Vorgängen, bei denen Objekte – z. B. infolge stetiger Energieaufnahme aus der Umgebung – bevorzugt eine von Null verschiedene Absolutgeschwindigkeit einnehmen. Die mathematische Modellierung erfolgt dabei in der Regel durch nichtlineare Reibungskräfte, welche zum Auftreten komplexer dynamischer Attraktoren [34,35,36] sowie zu Geschwindigkeitsverteilungen mit mehreren Maxima führen können. Der Anwendungsbereich der Theorie umfaßt einerseits biophysikalische Problemstellungen wie z. B. die Mobilität von Tierschwärmen [12,14], anderseits aber auch technisch relevante Fragen wie die Erzeugung stationärer Spannungsstrukturen in nichtlinearen elektrischen Schaltungen [37].

Beispiel: Depotmodell. Dieses von Ebeling, Schweitzer und Tilch [11,12,14] entwickelte Modell für aktive Brownsche Bewegung basiert auf der Annahme, daß ein Objekt (z. B. biologischer Organismus) Energie aus einem externen Reservoir aufnimmt, in einem internen Depot speichert und anschließend einen Teil davon in gerichtete Bewegungsenergie umwandelt. Nimmt man zusätzlich an, daß ein solches aktives Teilchen einer quasi-linearen Reibung in einem fluktuierenden Medium ausgesetzt ist, so ergibt sich für das Depotmodell [11,12,14]

$$y := p = mv, \qquad a := -\nu_0 p + \frac{q}{\kappa + (p/m)^2} p, \qquad b := \sqrt{2D} = konst. \tag{12}$$

Wie bei der linearen Brownschen Bewegung nach Gl. (9) charakterisieren $\nu_0 > 0$ und $D > 0$ die Wechselwirkung mit dem Medium. Im neu hinzugekommenen Reibungsterm parametrisiert $q > 0$ die Energieaufnahme aus dem externen Reservoir und $\kappa > 0$ das Verhältnis von innerer Dissipation[3] zu tatsächlich in Bewegung umgewandelter Depotenergie. Die Reibungskraft a verschwindet für

$$p_\pm = \pm m \left(\frac{q}{\nu_0} - \kappa \right)^{1/2} =: m v_\pm . \tag{13}$$

Dies entspricht den bevorzugten Geschwindigkeiten des aktiven Brownschen Teilchens im Depotmodell (sofern $q > \kappa\nu_0$; im unterkritischen Fall $q < \kappa\nu_0$ bleibt $p_0 = 0$ stabil). Als stationäre Impulsverteilung ergibt sich

$$f(p) = C \left(\kappa + \frac{p^2}{m^2} \right)^{\frac{qm^2}{2D}} \exp\left(-\frac{\nu_0 p^2}{2D} \right) . \tag{14}$$

Für $q > \kappa\nu_0$ besitzt $f(p)$ zwei Maxima bei $p_\pm$ und unterscheidet sich somit signifikant von der Maxwell-Verteilung (11).

---

[2] Siehe Gleichungen (9)–(11).

[3] Z. B. Energieverbrauch für Aufrechterhaltung lebenserhaltener Funktionen.

Das Depotmodell und verwandte nichtlineare Reibungsmodelle [38,39] wurde von W. Ebeling und verschiedenen Mitarbeitern [34,35,36,40] in den letzten Jahren intensiv untersucht. Dabei ergab sich beispielsweise die Erkenntnis, daß aktive Reibung in linearen und nichtlinearen Ketten zur Ausbildung stabiler Normalmoden oder Solitonen beträgt, die sich auch experimentell beobachten lassen [37].

3.2 Kanonisch-dissipative Systeme und quasi- quantenmechanische Verteilungen

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich auf Fälle, in denen die Koeffizientenfunktionen a und b vorgegeben waren (z. B. durch Ableitung aus einer unterliegenden mikroskopischen Theorie). Komplementär dazu läßt sich die Frage untersuchen, wie Reibung und Rauschamplitude in der Langevin-Gleichung zu wählen sind, damit die stationäre Lösung der zugehörigen FPG eine gewünschte Form annimmt. Mit dieser Problematik wollen wir uns in diesem Abschnitt befassen, wobei die nachfolgende Darstellung im wesentlichen auf eine Arbeit [15] von W. Ebeling zurückgeht.

Kanonisch-dissipative Systeme Von besonderer Bedeutung in der statistischen Physik sind Verteilungen, die sich mit Hilfe von Erhaltungsgrößen darstellen lassen. Ein typisches Beispiel ist die mikrokanonische Wahrscheinlichkeitsdichte [41,42]

$$f_{\mathrm{MK}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \mathcal{Z}_{\mathrm{MK}}^{-1}\;\delta(E - H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})), \tag{15}$$

welche ein Ensemble thermisch isolierter Hamiltonischer Systeme beschreibt, wobei die Dynamik der generalisierten Koordinaten $\boldsymbol{q} = (q_1,\dots,q_d)$ und konjugierten Impulsen $\boldsymbol{p} = (p_1,\dots,p_d)$ durch Hamiltonsche Bewegungsgleichungen der Form

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{16}$$

bestimmt ist, so daß die Hamilton-Funktion bzw. Energie

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{d} \frac{p_i^2}{2m_i} + U(\boldsymbol{q}) = E \tag{17}$$

zeitlich erhalten bleibt. Weitere wichtige Beispiele – die nachfolgend im Mittelpunkt stehen sollen – sind kanonische Verteilungen vom Maxwell-Boltzmann (MB), Thomas-Fermi (TF) oder Bose-Einstein-Typ (BE):

$$f_{\mathrm{MB}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \mathcal{Z}_{\mathrm{MB}}^{-1}\;\exp[-\beta H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})], \tag{18a}$$

$$f_{\mathrm{TF}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \frac{\mathcal{Z}_{\mathrm{TF}}^{-1}}{\exp\{\beta[H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) - \mu]\} + 1}, \tag{18b}$$

$$f_{\mathrm{BE}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \frac{\mathcal{Z}_{\mathrm{BE}}^{-1}}{\exp\{\beta[H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) - \mu]\} - 1}, \tag{18c}$$

wobei $\mathcal{Z}$ die jeweilige Normierungskonstante, μ das chemische Potential und $\beta = (k_B T)^{-1}$ die inverse thermische Energie bezeichnen. Im Gegensatz zur mikrokanonischen Verteilung (15) beziehen sich die (groß)kanonischen Wahrscheinlichkeitsdichten (18) auf solche Fälle, in denen die interessierenden Freiheitsgrade $\boldsymbol{q}$ in ein (unendlich großes) Wärmereservoir eingebettet sind. Man kann nun fragen, ob es möglich ist, die Verteilungen (18) mittels geeigneter Langevin-Gleichungen zu simulieren. Wie von W. Ebeling [15] gezeigt, läßt sich diese Frage generell bejahen. Um dies kurz zu illustrieren, betrachten wir das System gekoppelter SDGen [15]

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m_i} \tag{19a}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - g(H)\,\frac{\partial H}{\partial p_i} + [2D(H)]^{1/2} L_i(t), \tag{19b}$$

wobei die Zufallskräfte $(L_1, \ldots, L_d)$ als unabhängig vorausgesetzt werden und jedes L_i der Dichte (2) genügen soll. Da Reibungskoeffizient $g(H)$ und Rauschamplitude $D(H)$ jeweils nur von der Hamilton-Funktion H abhängen, bezeichnet man die Gl. (19) auch als *kanonisch-dissipative* Bewegungsgleichungen. Je nach Wahl der Diskretisierungsregel lautet die zugehörige FPG

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = S \tag{20a}$$

mit

$$S = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ g(H)\,\frac{\partial H}{\partial p_i}\, f + D(H)^{(1-\eta)}\, \frac{\partial}{\partial p_i} [D(H)^{\eta}\, f] \right\}, \tag{20b}$$

und man findet als stationäre Lösung

$$f_s(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \frac{C}{D(H)^{\eta}} \exp\left[-\int \mathrm{d}H\, \frac{g(H)}{D(H)} \right]. \tag{21}$$

Erzeugung quasi-quantenmechanischer Verteilungen Wir betrachten zunächst die HK-Diskretisierungsvorschrift $\eta = 0$ [25,26,27,28]. Durch einen Vergleich von (21) mit (18) ergeben sich dann unmittelbar folgende Forderungen für die Realisierung der verschiedenen kanonischen Verteilungen

$$\frac{g_{\mathrm{MB}}(H)}{D_{\mathrm{MB}}(H)} = \beta, \tag{22a}$$

$$\frac{g_{\mathrm{TF}}(H)}{D_{\mathrm{TF}}(H)} = \frac{\beta}{1 + \exp[-\beta(H-\mu)]}, \tag{22b}$$

$$\frac{g_{\mathrm{BE}}(H)}{D_{\mathrm{BE}}(H)} = \frac{\beta}{1 - \exp[-\beta(H-\mu)]}. \tag{22c}$$

Wählt man also die Koeffizienten g und D gemäß (22), so liefern die Langevin-Gleichungen (19) jeweils Teilchenensemble, deren stationäre Verteilungen durch (18) gegeben sind. Dies bedeutet natürlich nicht, daß die Bewegungsgleichungen (19) die Quantendynamik des Teilchenensembles exakt widerspiegeln; man sollte sie stattdessen eher als eine Art semi-klassische Beschreibung bzw. Näherung auffassen, die gegebenenfalls in Anwendungen (z. B. numerischen Rechnungen) von Nutzen sein kann. Interessanterweise benötigt man bei Verwendung der HK-Vorschrift $\eta = 0$ jeweils nur die durch (22) festgelegte Proportionalität zwischen g und D, wobei verschiedene Realsierungsmöglichkeiten i. a. allerdings ein unterschiedliches Relaxationsverhalten liefern.

Im Fall alternativer Diskretisierungen $\eta > 0$ ist zusätzlich zu (22) noch $D = const.$ zu fordern. Hiermit wird die durch (18) erzwungene H-Unabhängigkeit des Vorfaktors in der stationären Lösung (21) gewährleistet.

3.3 Relativistische Brownsche Bewegung

Die Notwendigkeit zur Modifikation der klassischen Gleichungen (9) im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie [23,24] erschließt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß die Maxwell-Verteilung (10) als zugehörige stationäre Lösung auch dem Ereignis $|v| > c$ eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit zuordnet (c bezeichnet wie üblich die Lichtgeschwindigkeit). Zur Lösung dieses Problems wurden in den letzten Jahren im wesentlichen zwei Verallgemeinerungen [16,17,18] der nichtrelativistischen Langevin-Gleichung vorgeschlagen, die wir kurz diskutieren wollen.[4]

Als erstes betrachten wir den Vorschlag von Debbasch et al. [16], welcher im Ruhesystem des Wärmebades auf die modifizierte Langevin-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\nu_0 \frac{mc^2}{E(p)} p + (2D)^{1/2}\, L(t) \tag{23}$$

führt. Hierbei sind ν_0 und D konstante Parameter, $L(t)$ folgt der Verteilung (2), $E(p) = (m^2c^4 + p^2c^2)^{1/2}$ ist die relativistische kinetische Energie und $p = m\gamma(v)v$ bezeichnet den relativistischen Teilchenimpuls mit

$$\gamma(v) := \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{1/2} = \frac{E(p)}{mc^2}. \tag{24}$$

In der Notation von Abschnitt 2 gilt also $a = -\nu_0 mc^2 p/E$ und $b = (2D)^{1/2}$, und es ergibt sich nach Gl. (6) als stationäre Lösung die Jüttner-Verteilung [46]

$$f_s(p) = C \exp[-\beta E(p)], \qquad \beta = \frac{m\,\nu_0}{D}. \tag{25}$$

Zur Ableitung von (23) wurde von Debbasch et al. [16] postuliert, daß die Rauschkraft $(2D)^{1/2}L(t)$ unverändert aus dem nichtrelativistischen Fall übernommen werden kann. Anschließend wurde dann die Reibungskraft so bestimmt,

[4] Siehe [43,44,45] für frühe Arbeiten zu diesem Thema.

daß sich gerade die Jüttner-Verteilung (25) ergibt (analog zur Vorgehensweise im vorangegangenen Abschnitt).

Ein etwas anderer Zugang wurde in den Referenzen [17,18] verfolgt. Dort wurde das Postulat an den Anfang gestellt, daß die entsprechende „Newtonsche“ Langevin-Gleichung im mit dem Teilchen mitbewegten Inertialsystem gelten soll. Dies entspricht der eigentlich üblichen Vorgehensweise zur Verallgemeinerung nichtrelativistischer Kräfte [47] in der Speziellen Relativitätstheorie. Man erhält dann im Ruhesystem des Bades folgende Langevin-Gleichung [17]

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\nu_0 p + \left[2D\ \frac{E(p)}{mc^2}\right]^{1/2}\ L(t). \tag{26}$$

Die stationäre Lösung der zugehörigen FPG lautet in Abhängigkeit von der gewählten Diskretisierung

$$f_s(p) = \frac{C}{E(p)^{\eta/2}} \exp[-\beta E(p)], \qquad \beta = \frac{m\,\nu_0}{D}; \tag{27}$$

d. h., um die Jüttner-Verteilung (25) zu erhalten, benötigt man die HK-Vorschrift mit $\eta = 0$. Es ist also festzustellen, daß die beiden relativistischen Langevin-Gleichungen (23) und (26) dieselbe stationäre Verteilung liefern, sich aber in ihrem Relaxationsverhalten unterscheiden. Konzeptionell scheint sich Gl. (26) jedoch dadurch auszuzeichnen, daß sie sich übereinstimmend mit der üblichen Vorstellung im mitbewegten Inertialsystem auf die bekannte nichtrelativistische Langevin-Gleichung reduziert.[5]

Abschließend merken wir noch an, daß Anwendungsfelder der hier skizzierten relativistischen Verallgemeinerungen im Bereich der Hochenergiephysik von Teilchenbeschleunigern [48,49,50] sowie der Astrophysik [51] liegen.

Danksagung Die Autoren möchten die Gelegenheit nutzen, sich sehr herzlich bei Prof. W. Ebeling für die Zusammenarbeit während der vergangenen Jahre zu bedanken. Insbesondere denken J. D. und S. H. auch heute noch mit viel Freude an die sehr interessanten Einführungsvorlesungen während ihrer Studienzeit zurück.

Literatur

1. M. Grigoriu. *Stochastic Calculus: Applications in Science and Engineering.* Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2002.
2. W. Ebeling, J. Dunkel, U. Erdmann, and S. A. Trigger. Klimontovich's contributions to the kinetic theory of nonlinear Brownian motion and new developments. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 11:89–98, 2005.

[5] Auf den ersten Blick scheint ein formaler Vorteil von (23) darin zu bestehen, daß man für konstante Parameter D unabhängig von der Diskretisierungsregel die selbe stationäre Verteilung erhält; letzteres gilt allerdings nicht mehr bei Übergang zu realistischen (d. h. impulsabhängigen) Reibungskoeffizienten und Rauschamplituden.

3. H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic Finance - An Introduction in Discrete Time.* Number 27 in de Gruyter Studies in Mathematics. Walter de Gruyter, 2. edition, 2004.
4. P. Jäckel. *Monte Carlo Methods in Finance.* Wiley Finance Series. John Wiley & Sons, Chichester, 2002.
5. P. Hänggi, P. Talkner, and M. Borkovec. Reaction rate theory: fifty years after Kramers. *Rev. Mod. Phys.*, 62(2):251, 1990.
6. N. G. Van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry.* North-Holland Personal Library, Amsterdam, 2003.
7. H. Rosé. *Evolutionäre Strategien und Multitome Optimierung.* PhD thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, 1998.
8. J. Dunkel, L. Schimansky-Geier, W. Ebeling, and P. Hänggi. Kramers problem in evolutionary strategies. *Phys. Rev. E*, 67:061118, 2003.
9. J. Dunkel, L. Schimansky-Geier, and W. Ebeling. Exact solutions for evolutionary strategies on harmonic landscapes. *Evol. Comput.*, 12(1):1–17, 2004.
10. L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni. Stochastic resonance. *Rev. Mod. Phys.*, 70(1):223–287, 1998.
11. F. Schweitzer, W. Ebeling, and B. Tilch. Complex motion of Brownian particles with energy depots. *Phys. Rev. Lett.*, 80(23):5044–5047, 1998.
12. W. Ebeling, F. Schweitzer, and B. Tilch. Active Brownian particles with energy depots modelling animal mobility. *BioSystems*, 49:17–29, 1999.
13. U. Erdmann, W. Ebeling, L. Schimansky-Geier, and F. Schweitzer. Brownian particles far from equilibrium. *Eur. Phys. J. B*, 15:105–113, 2000.
14. F. Schweitzer, W. Ebeling, and B. Tilch. Statistical mechanics of canonical-dissipative systems and applications to swarm dynamics. *Phys. Rev. E*, 64:021110, 2001.
15. W. Ebeling. Canonical non-equilibrium statistics and applications to fermi-bose systems. *Cond. Mat. Phys.*, 3(2):285–293, 2000.
16. F. Debbasch, K. Mallick, and J. P. Rivet. Relativistic Ornstein-Uhlenbeck Process. *J. Stat. Phys*, 88:945–966, 1997.
17. J. Dunkel and P. Hänggi. Theory of the relativistic Brownian motion: The (1+1)-dimensional case. *Phys. Rev. E*, 71:016124, 2005.
18. J. Dunkel and P. Hänggi. Theory of the relativistic Brownian motion: The (1+3)-dimensional case. *Phys. Rev. E*, 72:036106, 2005.
19. R. Zygadlo. Free Brownian motion approach to the ideal gas of relativistic particles. *Phys. Lett. A*, 345:323–329, 2005.
20. A. Fingerle. Relativistic Fluctuation Theorems. *ArXiv Condensed Matter e-prints, cond-mat/0601303*, January 2006.
21. A. Einstein. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspensierten Teilchen. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 17:549–560, 1905.
22. A. Einstein and M. von Smoluchowski. *Untersuchungen über die Theorie der Brownschen Bewegung/Abhandlungen über die Brownsche Bewegung und verwandte Erscheinungen*, volume 199. Harri Deutsch, Frankfurt, 3 edition, 1999.
23. A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 17(4):891–921, 1905.
24. A. Einstein. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig? *Ann. Phys. (Leipzig)*, 18:639–641, 1905.
25. P. Hänggi. Stochastic processes i: Asymptotic behaviour and symmetries. *Helv. Phys. Acta*, 51:183–201, 1978.

26. P. Hänggi. Connection between deterministic and stochastic descriptions of nonlinear systems. *Helv. Phys. Acta*, 53:491–496, 1980.
27. P. Hänggi and H. Thomas. Stochastic processes: Time evolution, symmetries and linear response. *Phys. Rep.*, 88(8):207, 1982. see pp. 292–294.
28. Yu. L. Klimontovich. Nonlinear Brownian motion. *Physics-Uspekhi*, 37(8):737–766, 1994.
29. D. Fisk. Quasi-martingales and stochastic integrals. *Ph.D thesis, Michigan State University, Dept. of Statistics*, 1963.
30. R. L. Stratonovich. A new representation for stochastic integrals and equations. *Vestnik Moskov. Univ., Ser. I: Mat., Mekh.*, 1:3–12, 1964.
31. R. L. Stratonovich. A new representation for stochastic integrals and equations. *SIAM J. Control*, 4:362–371, 1966.
32. K. Ito. Stochastic integral. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 20:519–524, 1944.
33. K. Ito. On stochastic differential equations. *Mem. Amer. Mathem. Soc.*, 4:51–89, 1951.
34. V. Makarov, W. Ebeling, and M. Velarde. Soliton-like waves on dissipative Toda lattices. *Int. J. Bifurc. & Chaos*, 10:1075–1089, 2000.
35. W. Ebeling, P. S. Landa, and V. Ushakov. Self-oscillations in Toda ring chains with negative friction. *Phys. Rev. E*, 63:046601, 2001.
36. J. Dunkel, W. Ebeling, U. Erdmann, and V. A. Makarov. Coherent motions and clusters in a dissipative Morse ring chain. *Int. J. Bif. & Chaos*, 12(11):2359–2377, 2002.
37. V. A. Makarov, E. del Rio, W. Ebeling, and M. G. Velarde. Dissipative Toda-Rayleigh lattice and its oscillatory modes. *Phys. Rev. E*, 64:036601, 2001.
38. M. Schienbein and H. Gruler. Langevin Equation, Fokker-Planck Equation and Cell Migration . *Bull. Math. Biology*, 55:585–608, 1993.
39. J. W. Rayleigh. *The Theory of Sound*, volume 1. Dover, New York, 2 edition, 1945.
40. J. Dunkel, W. Ebeling, and S. Trigger. Active and passive Brownian motion of charged grains in dusty plasma models. *Phys. Rev. E*, 70:046406, 2004.
41. R. Becker. *Theory of heat.* Springer, New York, 1967.
42. F. Schwabl. *Statistische Mechanik.* Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
43. G. Schay. *The equations of diffusion in the special theory of relativity.* PhD thesis, Princeton University, 1961. available through University Microfilms, Ann Arbor, Michigan, https://wwwlib.umi.com.
44. R. M. Dudley. Lorentz-invariant Markov processes in relativistic phase space. *Arkiv för Matematik*, 6(14):241–268, 1965.
45. R. Hakim. A covariant theory of relativistic Brownian motion. *J. Math. Phys.*, 6(10):1482–1495, 1965.
46. F. Jüttner. Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 34:856–882, 1911.
47. T. Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie.* Elsevier - Spektrum Akademischer Verlag, 4 edition, 2003.
48. R. Rapp, V. Greco, and H. van Hees. Heavy-Quark Spectra at RHIC and Resonances in the QGP. *ArXiv High Energy Physics - Phenomenology e-prints, hep-ph/0510050*, October 2005.
49. H. van Hees, V. Greco, and R. Rapp. Heavy-Quark Probes of the Quark-Gluon Plasma at RHIC. *ArXiv Nuclear Theory e-prints, nucl-th/0508055*, August 2005.
50. H. van Hees, V. Greco, and R. Rapp. Thermalization and Flow of Heavy Quarks in the Quark-Gluon Plasma. *ArXiv High Energy Physics - Phenomenology e-prints, hep-ph/0601166*, January 2006.

51. M. E. Dieckmann, L. O'C. Drury, and P. K. Shukla. On the ultrarelativistic two-stream instability, electrostatic turbulence and Brownian motion. *New J. Phys.*, 8:40, 2006.