Haynes Miller
April 83

DÉRIVÉS DE LA DÉSTABILISATION, INVARIANTS DE HOPF D'ORDRE SUPÉRIEUR, ET SUITE SPECTRALE D'ADAMS

Jean LANNES et Saïd ZARATI

0. - INTRODUCTION.

Soient X , Y deux espaces pointés et $\{X,Y\}$ le groupe des classes d'homotopie d'applications stables de X dans Y . Notre propos est de décrire une relation entre d'une part "l'homomorphisme d'Hurewicz modulo 2" :

$$\mathcal{H} : \{X,Y\} \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(H^*(\Omega^\infty S^\infty Y ; \mathbb{Z}/2), H^*(X ; \mathbb{Z}/2)) \ ,$$

et d'autre part la suite spectrale d'Adams en cohomologie modulo 2 .

Cette note se compose de deux parties. La première est algébrique, elle doit beaucoup à des conversations avec W.M. Singer que nous tenons à remercier.

Soient A l'algèbre de Steenrod modulo 2 et M un A-module. On dit que M est instable si $Sq^i x = 0$ pour tout élément x de M de degré n et tout $i > n$. Toute application A-linéaire d'un A-module M vers un A-module instable se factorise de façon unique à travers un A-module instable noté $D(M)$. Le foncteur D défini sur la catégorie des A-modules et à valeurs dans celle, notée $\mathcal{U}_A$, des A-modules instables est un foncteur exact à droite dont nous étudions les foncteurs dérivés D_s , $s \geq 0$. Nous calculons en particulier $D_s \Sigma^{1-s} M$ pour tout A-module instable et tout $s \geq 0$. Notre résultat est un isomorphisme $D_s \Sigma^{1-s} M \simeq \Sigma R_s(M)$ où R_s , $s \geq 0$, est un foncteur "explicite" de $\mathcal{U}_A$ dans $\mathcal{U}_A$; le foncteur R_1 coïncide avec le foncteur R de W.M. Singer [14] . Il est à noter que si K est un injectif de $\mathcal{U}_A$ (resp. de la catégorie $\mathcal{U}_A^{tf}$ des A-modules instables de type fini) alors, pour tout A-module M (resp. A-module de type fini), $\mathrm{Ext}_A^s(M,K)$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(D_s M,K)$. Des exemples de tels K sont fournis par des duaux convenables de la cohomologie modulo 2 des spectres de Brown-Gitler, ce qui permet de retrouver certains résultats de Brown et Gitler ([2], [3], [8]). De même, comme l'a récemment remarqué H. Miller [10], les travaux de Carlsson [5] montrent que la cohomologie modulo 2 du groupe $\mathbf{Z}/2$, notée P, est un injectif de $\mathcal{U}_A^{tf}$, ce qui redonne la valeur des $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(\mathbf{Z}/2,P)$ pour $t-s \leq 0$.

Le lien entre les deux parties de cette note est le suivant : le A-module $R_s\tilde{H}^*(Y;\mathbf{Z}/2)$ est un quotient de $\tilde{H}^*(\mathfrak{S}_{2^s}Y;\mathbf{Z}/2)$, $\mathfrak{S}_{2^s}Y$ désignant l'espace $(E\mathfrak{S}_{2^s})_+ \underset{\mathfrak{S}_{2^s}}{\wedge} (Y\wedge\ldots\wedge Y)$, Y 2^s-fois ($\mathfrak{S}_{2^s}$ est le 2^s-ème groupe symétrique). Ainsi, de même que le foncteur D_1 est relié à la construction quadratique, de même les foncteurs D_s sont reliés à des constructions "hyperquadratiques".

Dans la deuxième partie de cette note, nous considérons respectivement les termes $E_\infty^{s,s}$ et $E_2^{s,s}$ de la suite spectrale d'Adams, en cohomologie modulo 2, pour les groupes $\{S^*X,Y\}$. En utilisant le fait que $\tilde{H}^*(\mathfrak{S}_{2^s}Y;\mathbf{Z}/2)$ est un sous A-module de $H^*(Q\overset{Y}{\cancel{X}};\mathbf{Z}/2)$, nous montrons que l'homomorphisme $\aleph$ induit un homomorphisme $\aleph_\infty^s : E_\infty^{s,s} \to \mathrm{Hom}_A(R_s\tilde{H}^*(Y;\mathbf{Z}/2),\tilde{H}^*(X;\mathbf{Z}/2))$. D'autre part, l'algèbre homologique de la première partie fournit aussi un homomorphisme $\aleph_2^s : E_2^{s,s} \to \mathrm{Hom}_A(R_s\tilde{H}^*(Y;\mathbf{Z}/2),\tilde{H}^*(X;\mathbf{Z}/2))$; notre résultat est que $\aleph_\infty^s$ et $\aleph_2^s$ sont compatibles.

Nous donnons deux exemples d'application de notre théorie. Le premier est la conjecture de Segal pour le groupe $\mathbf{Z}/2$ ([7], [5]). Le second est le résultat de Brumfiel, Madsen et Milgram sur l'image réciproque des classes de Kervaire par l'application : $G \to G/TOP$ [4].

1. - SUR LES DERIVES DE LA DESTABILISATION.

1.1. Enoncé du problème.

Soit A l'algèbre de Steenrod modulo 2 . On désigne par $\mathfrak{M}_A$ la catégorie dont les objets sont les A-modules gradués et dont les morphismes sont les applications A-linéaires de degré zéro. Pour tout t dans $\mathbb{Z}$, on note $\Sigma^t : \mathfrak{M}_A \to \mathfrak{M}_A$ le foncteur qui associe au module $M = \{M^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ le module défini par $\Sigma^t M = \{M^{n-t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

On dit qu'un A-module M est instable si $Sq^i x = 0$ pour tout x de M et tout i tel que $i > |x|$, $|x|$ désignant le degré de x . On note $\mathfrak{U}_A$ la catégorie des A-modules instables.

Soit M un A-module, on désigne par B(M) le sous-espace vectoriel de M engendré par les éléments de la forme $Sq^i x$ avec $i > |x|$, x décrivant M . Les relations d'Adem montrent que B(M) est en fait un sous A-module de M ; on note D(M) le quotient M/B(M) .

Le A-module D(M) est un A-module instable qui vérifie la propriété universelle suivante : toute application A-linéaire de M vers un A-module instable se factorise de façon unique à travers D(M) . On a donc défini un foncteur D , dit de déstabilisation, de $\mathfrak{M}_A$ vers $\mathfrak{U}_A$; ce foncteur est exact à droite ; on note D_s , $s \geq 0$, ses foncteurs dérivés.

Soient C_* une A-résolution libre de M et $\tilde{C}_*$ le complexe augmenté correspondant. La suite exacte de complexes : $0 \to B(\tilde{C}_*) \to \tilde{C}_* \to D(\tilde{C}_*) \to 0$ où $\tilde{C}_*$ est acyclique donne en homologie les isomorphismes suivants :
$D_s(M) \simeq H_{s-1}(B(\tilde{C}_*))$, $s \geq 1$.

Considérons en particulier la bar-résolution de M que nous notons $W_*(M)$. Rappelons que $W_*(M)$ est définie de la façon suivante :

$$W_s(M) = A \otimes I \otimes \ldots \otimes I \otimes M \text{ , } I \text{ s fois ;}$$

dans cette formule, le produit tensoriel est celui des $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels et

I désigne l'idéal d'augmentation de A . La structure de A-module de $W_s(M)$ est donnée par $a.(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_s \otimes x) = a\, a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_s \otimes x$; le bord $d_s : W_s(M) \to W_{s-1}(M)$ est donné par $d_s(a_0 \otimes \ldots \otimes x) = a_0 a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes x + {}$ $+ a_0 \otimes a_1 a_2 \otimes a_3 \otimes \ldots \otimes x + \ldots + a_0 \otimes \ldots a_{s-1} \otimes a_s x$ et l'augmentation $d_0 : W_0(M) \to M$ par $d_0(a_0 \otimes x) = a_0 x$.

On a donc : $D_s(M) \simeq H_{s-1} B\widetilde{W}_*(M)$ $(s \geq 1)$. Si $s = 1$ et si M est instable, on a la formule $D_1(M) \simeq H_0 B\widetilde{W}_*(M) = H_0 BW_*(M)$. Le A-module $\Sigma^{-1} H_0 BW_*(M)$ est le A-module R(M) décrit par W.M. Singer dans [14]; nous nous proposons dans ce qui suit d'expliciter $D_s \Sigma^{1-s} M$ pour tout A-module M instable et tout $s \geq 0$.

1.2. Calcul de $D_s \Sigma^{1-s} M$, M instable.

1.2.1. L'application α_s .

Soient M_1 et M_2 deux A-modules ; on note $M_1 \otimes M_2$ le produit tensoriel de M_1 et M_2 sur $\mathbb{Z}/2$ muni de l'action "diagonale" de A définie à l'aide de la formule de Cartan. Si M_1 et M_2 sont instables, il en est de même pour $M_1 \otimes M_2$.

On note P la cohomologie modulo 2 du groupe $\mathbb{Z}/2$; P s'identifie à $\mathbb{Z}/2\,[u]$ avev $|u| = 1$; P est un A-module instable. Il existe un A-module , noté $\hat{P}$, caractérisé par les propriétés suivantes : $\hat{P}$ contient P comme A-module, $\hat{P}/P = \Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2$, $Sq^i u^{-1} = u^{i-1}$, u^{-1} désignant le générateur de $\hat{P}^{-1}$. On note e l'élément de $\mathrm{Ext}^1_A(\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2, P)$ représenté par la suite exacte $0 \to P \to \hat{P} \to \Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2 \to 0$.

On note P_s la cohomologie modulo 2 du groupe $(\mathbb{Z}/2)^s$; P_s s'identifie à $\mathbb{Z}/2\,[u_1,\ldots,u_s]$ avec $|u_1| = \ldots = |u_s| = 1$ ou encore au produit tensoriel de A-modules $\mathbb{Z}/2\,[u_1] \otimes \ldots \otimes \mathbb{Z}/2\,[u_s]$, P_s est instable ; enfin P_s est muni d'une action A-linéaire du groupe linéaire $GL_s(\mathbb{Z}/2)$. On note e^s l'élément de $\mathrm{Ext}^s_A(\Sigma^{-s}\mathbb{Z}/2, P_s)$ produit tensoriel de s copies de e . On vérifie :

LEMME 1.2.1. L'élément e^s est invariant sous l'action de $GL_s(\mathbb{Z}/2)$ sur $\mathrm{Ext}_A^s(\Sigma^{-s}\mathbb{Z}/2, P_s)$.

Rappelons qu'étant donné trois A-modules M_1 , M_2 et M_3 , on peut définir un cap-produit :

$$D_s(M_1 \otimes M_3) \otimes \mathrm{Ext}_A^{s'}(M_1, M_2) \to D_{s-s'}(M_2 \otimes M_3) \quad .$$

Prenons $M_1 = \Sigma^{-s}\mathbb{Z}/2$, $M_2 = P_s$ et $M_3 = M$, M étant un A-module instable ; alors, le cap-produit par e^s est une application A-linéaire :

$$D_s\Sigma^{-s}M \longrightarrow P_s \otimes M$$

que nous notons α_s^M où simplement α_s s'il n'y a pas de doute quant au choix de M . Notons L_s le sous-A-module de P_s formé des éléments invariants sous l'action de $GL_s(\mathbb{Z}/2)$; le lemme 1.2.1 montre que l'image de α_s^M est en fait contenue dans $L_s \otimes M$.

Notre résultat est que, pour tout A-module instable M , l'application $\alpha_s^{\Sigma M}$ induit un isomorphisme de $D_s\Sigma^{1-s}M$ sur un sous-A-module de $\Sigma(P_s \otimes M)$ que nous allons décrire.

1.2.2. Les foncteurs R_s .

Pour tout A-module instable M , on définit une application $\mathbb{Z}/2$-linéaire de M dans $P \otimes M$ en faisant correspondre à tout x de M l'élément $St_1(x) = \sum_{i=0}^{n} u^{n-i} \otimes Sq^i x$, n désignant le degré de x . Par récurrence, on définit une application $\mathbb{Z}/2$-linéaire de M dans $P_s \otimes M$ en posant :

$$St_0 = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad St_s = St_1 \circ St_{s-1} \quad \text{si} \quad s \geq 1 \, .$$

PROPOSITION 1.2.2.1. Soit x un élément de degré n de M , alors $\Sigma St_s(x)$ est l'image par $\alpha_s^{\Sigma M}$ de l'élément de $D_s\Sigma^{1-s}M$ représenté par le $(s-1)$-cycle :

$$Sq^{2^{s-1}n+1} \otimes Sq^{2^{s-2}n+1} \otimes \ldots \otimes Sq^{n+1} \otimes \Sigma^{1-s}x \quad \text{de} \quad B\widetilde{W}_*(\Sigma^{1-s}M) \quad .$$

$$Sq^{2^{s-1}n+1}\left[Sq^{2^{s-1}n+1} \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, Sq^{n+1}\right]\Sigma^{1-s}x \, .$$

COROLLAIRE 1.2.2.2. L'image de St_s est contenue dans $L_s \otimes M$.

DEFINITION 1.2.2.3. Soit M un A-module instable ; on note $R_s(M)$, $s \geq 0$, le sous-L_s-module de $L_s \otimes M$ engendré par $St_s(M)$.

PROPOSITION 1.2.2.3. (i) Soit M un A-module instable, $R_s(M)$ est un sous A-module de $L_s \otimes M$, en particulier $R_s(M)$ est un A-module instable.

(ii) Soit $\{x\}$ une $\mathbb{Z}/2$-base de M , alors $\{St_s(x)\}$ est une L_s-base de $R_s(M)$.

1.2.3. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat algébrique principal de cette note.

THEOREME 1.2.3. Soit M un A-module instable, alors, pour tout $s \geq 0$, l'application $\alpha_s^{\Sigma M}$ induit un isomorphisme de $D_s \Sigma^{1-s} M$ sur $\Sigma R_s(M)$.

Ce théorème montre que le foncteur R_1 coincide avec le foncteur R de W.M. Singer [14] et que les foncteurs R_s $(s \geq 2)$ en sont une généralisation raisonnable.

1.2.4. Remarques sur le calcul des $D_s(\Sigma^{-t} M)$, M instable et $t-s \geq 0$.

Soit M un A-module ; d'après la définition des D_s , on a l'isomorphisme (voir 1.3.5.1) :

$$Ext_A^{s,t}(M,\mathbb{Z}/2) \simeq Hom_A(D_s(\Sigma^{-t}M),\mathbb{Z}/2)$$

qui montre l'importance du calcul des $D_s(\Sigma^{-t}M)$.

Le cas M instable et $t-s \leq -1$ est réglé par le théorème 1.2.3 et la formule :

$$R_s(\Sigma M) = \Sigma\, w_{2^s-1} R_s(M) \;,$$

[cf Kuhn's thesis]

où w_{2^s-1} désigne l'élément de L_s produit de toutes les formes linéaires non nulles en $u_1,\dots,u_s$. Dans ce paragraphe, nous donnons une méthode permettant d'étudier les $D_s(\Sigma^{-t}M)$, M instable et $t-s \geq 0$.

A tout A-module M (non nécessairement instable), on associe le A-module "double de M" noté FM et défini par :

$$(FM)^n = \begin{cases} M^{n/2} & \text{si } n \equiv 0\ (2) \\ 0 & \text{si } n \equiv 1\ (2) \end{cases} \quad \text{et} \quad Sq^k(F(x)) = \begin{cases} F(Sq^{k/2} x) & \text{si } k \equiv 0\ (2) \\ 0 & \text{si } k \equiv 1\ (2) \end{cases} .$$

On note Sq_0 l'application A-linéaire de FM dans M définie par $Sq_0(F(x)) = Sq^{|x|} x$ et on pose $\Omega M = \Sigma^{-1}$ Coker Sq_0 et $\Omega_1 M = \Sigma^{-1}$ Ker Sq_0 ([9],[13]). On vérifie que si M est instable, il en est de même pour ΩM et $\Omega_1 M$; on vérifie également l'identité $\Omega D = D\Sigma^{-1}$.

Soient M un A-module et C_* une A-résolution libre de M ; on a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow FD(C_*) \xrightarrow{Sq_0} D(C_*) \longrightarrow \Sigma D(\Sigma^{-1} C_*) \longrightarrow 0 \quad .$$

En passant en homologie, on obtient la suite exacte naturelle :

$$0 \longrightarrow \Omega D_s(M) \longrightarrow D_s(\Sigma^{-1} M) \longrightarrow \Omega_1 D_{s-1}(M) \longrightarrow 0 \quad .$$ Stable Singer sequence

Quand M est instable, cette suite exacte permet d'avoir des renseignements sur les $D_s(\Sigma^{-t} M)$, $t-s \geq 0$; en particulier si $t = s$ et M toujours instable, on obtient, compte tenu du résultat du théorème 1.2.3, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow R_s(M) \longrightarrow D_s(\Sigma^{-s} M) \longrightarrow \Omega_1 D_{s-1}(\Sigma^{1-s} M) \longrightarrow 0 \quad ;$$

ce qui montre que $R_s(M)$ est un sous-A-module de $D_s(\Sigma^{-s} M)$. En prenant $M = \mathbb{Z}/2$, on obtient par récurrence l'isomorphisme : $\boxed{D_s(\Sigma^{-s} \mathbb{Z}/2) = L_s}$.

$(L_s = R_s(Z_2))$
and this has $\Omega_1 = 0$

1.3. Exemples et applications.

1.3.1. $D_2 \Sigma^t \mathbb{Z}/2$, $t \geq -1$.

L'isomorphisme $D_2 \Sigma^t \mathbb{Z}/2 \simeq H_1 BW_*(\Sigma^t \mathbb{Z}/2)$ montre que $D_2 \Sigma^t \mathbb{Z}/2$ s'identifie au quotient $Z/\mathcal{B}$, Z et $\mathcal{B}$ désignant les sous-A-modules de $I \otimes I$ (ici l'action de A sur $I \otimes I$ est donnée par $\theta.(\theta' \otimes \theta'') = \theta\theta' \otimes \theta''$) définis ci-dessous ; Z est constitué des éléments $\Sigma\, \theta' \otimes \theta''$ tels que :

(i) $\Sigma\, \theta' \theta'' = 0$;

(ii) $\theta' \in B(|\theta''| + t)$, $B(n)$ désignant pour tout entier naturel n l'idéal $\Sigma^{-n}B(\Sigma^n A)$ de A (notation de [15]) .

$\mathfrak{C}$ quant à lui est le $\mathbb{Z}/2$-sous-espace engendré par les éléments de la forme : $\theta'\alpha \otimes \theta'' - \theta' \otimes \alpha\theta''$ avec $\theta' \in B(|\alpha| + |\theta''| + t)$.

Soit (a,b) un couple d'entiers naturels avec $a < 2b$; on considère la relation d'Adem :

$$Sq^a Sq^b + \sum_i C^{a-2i}_{b-1-i} Sq^{a+b-i} Sq^i = 0 \ ;$$

et on pose :

$$R(a,b) = Sq^a \otimes Sq^b + \sum_i C^{a-2i}_{b-1-i} Sq^{a+b-i} \otimes Sq^i \ .$$

Si a et b satisfont en outre l'inégalité $b \leq a$, alors $R(a,b)$ est un 1-cycle du complexe $BW_*(\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2)$ et représente donc un élément de $D_2\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2$. A l'aide du théorème 1.2.3, on montre que les classes des $R(a,b)$, $b \leq a < 2b$, constituent une $\mathbb{Z}/2$-base de $D_2\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2$ et que les classes des $R(2^k,2^k)$, $k \geq 0$, constituent un A-système générateur minimal de $D_2\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2$. On vérifie en particulier que l'image par $\Sigma^{-1}\alpha_2$ de $R(2^k,2^k)$ dans L_2 est $\dfrac{u_1^{2^{k+1}-1} + u_2^{2^{k+1}-1}}{u_1 + u_2}$.

1.3.2. $D_2\Sigma^{-1}M$, M <u>instable</u>.

Soient M un module instable et x un élément de M ; on vérifie que $R(a + 2|x|, b + |x|) \otimes \Sigma^{-1}x$, $b \leq a < 2b$, est un 1-cycle de $BW_*(\Sigma^{-1}M)$ dont l'image par $\Sigma^{-1}\alpha_2^{\Sigma M}$ dans $L_2 \otimes M$ est le produit de $St_2(x)$ par l'élément $\Sigma^{-1}\alpha_2^{\Sigma\mathbb{Z}/2}R(a,b)$ de L_2 . On en déduit que si $\{x\}$ est une $\mathbb{Z}/2$-base de M , alors les classes des $R(a + 2|x|, b + |x|) \otimes \Sigma^{-1}x$, $b \leq a < 2b$, constituent une $\mathbb{Z}/2$-base de $D_2\Sigma^{-1}M$.

1.3.3. <u>Les relations de Browder</u>.

Quand on étudie l'invariant de Kervaire de certaines données de chirurgie, on est amené à considérer les relations $\sum_{i=1}^{n+1} C^{n+1}_{2n+2-i} Sq^i \chi Sq^{2n+2-i} = 0$, $n \geq 0$, où $\chi : A \to A$ est la conjugaison canonique. En conjugant ces relations par χ , on obtient les relations : $\sum_{i=1}^{n+1} C^{n+1}_{2n+2-i}\, Sq^{2n+2-i}\, \chi Sq^{i} = 0$,

qui sont de la forme considérée en 1.3.1 ; on note b_{2n} le 1-cycle $\sum_{i=1}^{n+1} C^{n+1}_{2n+2-i}\, Sq^{2n+2-i} \otimes \chi Sq^{i}$ de $BW_*(\Sigma^{-1}\mathbf{Z}/2)$. Grâce au théorème 1.2.3, on montre le résultat suivant que l'on peut considérer comme un analogue algébrique du résultat de Brumfiel-Madsen-Milgram concernant l'image réciproque des classes de Kervaire par l'application : $G \to G/TOP$ [4] .

<u>PROPOSITION 1.3.3</u>. <u>La classe de</u> b_{2n} <u>dans</u> $D_2\Sigma^{-1}\mathbf{Z}/2$ <u>est non triviale si et seulement si</u> $n+1$ <u>est une puissance de</u> 2 ; <u>dans ce cas</u>, <u>cette classe est égale à celle de la "relation d'Adem"</u> $R(n+1,n+1)$.

1.3.4. <u>Comparaison entre les groupes</u> $\mathbf{Z}/2 \otimes_A L_s$ <u>et</u> $\mathrm{Tor}^A_{s,*}(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}/2)$.

Si M est A-module tel que $M^n = 0$ pour $n<0$, alors B(M) est contenu dans IM et on a une application naturelle de D(M) vers $\mathbf{Z}/2 \otimes_A M$, ou encore de $\mathbf{Z}/2 \otimes_A D(M)$ vers $\mathbf{Z}/2 \otimes_A M$. On en déduit plus généralement que sous les mêmes hypothèses, il existe une application naturelle $\mathbf{Z}/2 \otimes_A D_s\Sigma^{-s}M \to \mathrm{Tor}^A_{s,*}(\mathbf{Z}/2,M)$. En particulier, si l'on prend $M = \Sigma^s\mathbf{Z}/2$, on obtient, compte tenu du calcul effectué en 1.2, une application naturelle : $\mathbf{Z}/2 \otimes_A L_s \to \mathrm{Tor}^A_{s,*}(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}/2)$ (de degré -s).
Singer
On vérifie par inspection :

<u>PROPOSITION 1.3.4</u>. (i) <u>L'application naturelle</u> : $\mathbf{Z}/2 \otimes_A L_1 \to \mathrm{Tor}^A_{1,*}(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}/2)$ <u>est un isomorphisme</u>.

(ii) <u>L'application naturelle</u> : $\mathbf{Z}/2 \otimes_A L_2 \to \mathrm{Tor}^A_{2,*}(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}/2)$ <u>est injective et son image est l'orthogonal du sous-espace de</u> $\mathrm{Ext}^{2,*}_A(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}/2)$ <u>engendré par les</u> $h_i h_j$, <u>avec</u> $j \geq i+2$.

Etant donné la relation qui existe entre les applications : $\mathbf{Z}/2 \otimes_A L_s \to \mathrm{Tor}^A_{s,*}(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}/2)$ et l'homomorphisme d'Hurewicz modulo 2 : $\pi^S_* = \pi_*\Omega^\infty S^\infty \to H_*(\Omega^\infty S^\infty;\mathbf{Z}/2)$ (dont on va parler dans la deuxième partie de cette note), il est raisonnable de conjecturer que l'application naturelle : $\mathbb{Z}/2 \otimes_A L_s \to \mathrm{Tor}^A_{s,*}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ est nulle pour $s \geq 3$.

1.3.5. Calcul des $\mathrm{Ext}^s_A(\ ,K)$ lorsque K est injectif dans la catégorie $\mathcal{U}_A$.

Soient M un A-module et K un A-module instable ; on a l'isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_A(M,K) \simeq \mathrm{Hom}_A(D(M),K) \ .$$

Il en résulte que si K est un injectif de $\mathcal{U}_A$, on a l'isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^s_A(M,K) \simeq \mathrm{Hom}_A(D_s(M),K) \ .$$

De même, si K est un A-module instable tel que le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\ ,K)$ soit exact sur la catégorie $\mathcal{U}_A^{tf}$ des A-modules instables de type fini, alors, pour tout A-module M de type fini, on a encore l'isomorphisme : $\mathrm{Ext}^s_A(M,K) \simeq \mathrm{Hom}_A(D_s(M),K)$. (on dit qu'un A-module M est de type fini si M^n est un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel de dimension finie pour tout n .)

Voici des exemples de tels K .

1.3.5.1. Le A-module $\mathbb{Z}/2$ est un injectif de $\mathcal{U}_A$; en effet, pour tout A-module instable M , on a $\mathrm{Hom}_A(M,\mathbb{Z}/2) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/2}(M^0,\mathbb{Z}/2)$; il en résulte l'isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^{s,t}_A(M,\mathbb{Z}/2) \simeq \mathrm{Hom}_A(D_s(\Sigma^{-t}M),\mathbb{Z}/2) \ .$$

Plus généralement, considérons le foncteur H_n de $\mathcal{U}_A$ vers la catégorie des $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels défini par :

$$H_n(M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/2}(M^n,\mathbb{Z}/2) \ .$$

Il existe un unique A-module instable noté $X(n)$ vérifiant : $H_n(M) \simeq \mathrm{Hom}_A(M,X(n))$. Le module $X(n)$ est le n-dual du quotient, noté $L(n)$, de A par l'idéal à gauche engendré par les $\chi(Sq^i)$, $2i > n$. Par définition, $X(n)$ est injectif dans $\mathcal{U}_A$ et par conséquent, on a les isomorphismes :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^{s,t}_A(\mathbb{Z}/2,X(n)) &\simeq \mathrm{Hom}_A(D_s(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/2),X(n)) \\ &\simeq H_n(D_s(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/2)) \ .\end{aligned}$$

Par dualité, on obtient que $\mathrm{Ext}^{s,t}_A(L(n),\mathbb{Z}/2)$ est isomorphe à $(D_s(\Sigma^{-t+n}\mathbb{Z}/2))^n$, sous-espace des éléments de degré n de $D_s(\Sigma^{-t+n}\mathbb{Z}/2)$.

Pour $t-s \leq n$, on retrouve des résultats de Brown-Gitler ([2],[3],[8]).

1.3.5.2. Le A-module P se décompose en la somme directe $\mathbb{Z}/2 \oplus \tilde{P}$, $\tilde{P}$ désignant le sous-A-module de P formé des éléments de degré positif. Dans [5], G. Carlsson introduit le module $X_1 = \varprojlim_q X(2^q)$ et montre que $\tilde{P}$ est facteur direct de X_1 . D'après ce qui précède, le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\ ,X_1)$ est exact sur la catégorie des A-modules de type fini, ce qui prouve que $\tilde{P}$ et P sont des injectifs de $\mathcal{U}_A^{tf}$. Cette observation est due à H. Miller [10]. On a donc l'isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M,P) \simeq \mathrm{Hom}_A(D_s(\Sigma^{-t}M),P)$$

pour tout A-module M de type fini.

En prenant $M = \mathbb{Z}/2$, on obtient les résultats de W.H. Lin [7].

(i) Si $t-s \leq -1$, $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{Z}/2,P) = 0$; en effet :

$$\mathrm{Hom}_A(D_s(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/2),P) = \mathrm{Hom}_A(D_s(\Sigma^{1-s}(\Sigma^{s-t-1}\mathbb{Z}/2)),P) = \mathrm{Hom}_A(\Sigma R_s(\Sigma^{s-t-1}\mathbb{Z}/2),P);$$

et, pour tout A-module M instable, $\mathrm{Hom}_A(\Sigma M,P) = 0$ puisque les applications $Sq^n : P^n \to P^{2n}$ et $Sq^n : (\Sigma M)^n \to (\Sigma M)^{2n}$ sont respectivement injective et triviale.

(ii) Si $t = s$, $\mathrm{Ext}_A^{s,s}(\mathbb{Z}/2,P) \simeq \mathrm{Hom}_A(L_s,P)$. Si $s > 0$, $\mathrm{Hom}_A(L_s,P)$ est un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel de dimension deux. Les applications induites en cohomologie modulo 2 respectivement par l'application triviale de $\mathbb{Z}/2$ dans $(\mathbb{Z}/2)^s$ et par une injection de $\mathbb{Z}/2$ dans $(\mathbb{Z}/2)^s$, constituent une base de $\mathrm{Hom}_A(L_s,P)$.

Enfin, si $s = 0$, $\mathrm{Ext}_A^{0,0}(\mathbb{Z}/2,P)$ est le $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel engendré par l'inclusion de $\mathbb{Z}/2$ dans P .

2. - INVARIANTS DE HOPF D'ORDRE SUPERIEUR ET SUITE SPECTRALE D'ADAMS

2.1. Notations.

Soit Y un espace pointé ; on note QY la limite inductive $\varinjlim_{p} \Omega^p S^p Y$ (p est un entier positif, Ω et S désignent respectivement les foncteurs espace de lacets et suspension).

Soit X un CW-complexe ; on appelle groupe des classes d'homotopie d'applications stables de X dans Y et on note $\{X,Y\}$ le groupe $[X,QY]$ ($[\ ,\ ]$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie d'applications pointées) ; si X est fini, $\{X,Y\}$ n'est pas autre chose que la limite inductive $\varinjlim_{p} [S^pX, S^pY]$, ce qui justifie la terminologie.

Enfin, le symbole H^* (resp. $\tilde{H}^*$) désignera la cohomologie (resp. la cohomologie réduite) modulo 2.

On supposera que, pour tout $n \geq 0$, le $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel H^nY est de dimension finie : c'est le prix à payer quand on préfère la cohomologie à l'homologie.

On se propose de décrire la relation qui existe entre d'une part l'homomorphisme naturel noté $\mathcal{H}$ (ici $\mathcal{H}$ est pour Hurewicz) :

$$\{X,Y\} \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(H^*QY, H^*X) \quad ,$$

et d'autre part, la suite spectrale d'Adams en cohomologie modulo 2 .

2.2. La cohomologie de l'espace QY .

Soient $m \geq 1$ un entier et $E\mathfrak{S}_m$ un espace contractile sur lequel le groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$ agit librement. On note $\mathfrak{S}_m Y$ le quotient de l'espace $(E\mathfrak{S}_m)_+ \wedge (Y \wedge Y \wedge \ldots \wedge Y)$, Y m fois, par l'action diagonale de $\mathfrak{S}_m$ (si Z est un espace, Z_+ désigne la réunion disjointe de Z et d'un point base).

On note $\varphi_m : QX \to Q\mathfrak{S}_m X$ la m-ème application de multiplicité, appelée aussi "James-Hopf invariant" dans la terminologie anglo-saxonne, que l'on peut considérer comme une application stable notée r_m de QY dans $\mathfrak{S}_m Y$ ([6], [11], [12], [16], [1]).

On a donc une application naturelle :

$$\underset{m\geq 0}{\oplus} r_m^* : \underset{m\geq 0}{\oplus} \widetilde{H}^* \mathfrak{S}_m Y \longrightarrow H^* QY$$

(on convient que $\mathfrak{S}_0 Y = S^0$ et que r_0^* est l'unité de $H^* QY$).

Si Y est connexe, cette application est un isomorphisme; dans le cas général, cette application est encore injective et son image peut être décrite de la façon suivante. Les composantes connexes de QY, qui sont indexées par le groupe $\pi_0^S Y$, ont toutes le même type d'homotopie et on a un isomorphisme :

$$H^* QY \simeq (H^* Q_0 Y)^{\pi_0^S Y} ,$$

$Q_0 Y$ désignant la composante connexe du point base de QY. L'image de $\underset{m\geq 0}{\oplus} r_m^*$ s'identifie à la limite inductive :

$$\varinjlim_{s\geq 0} (H^* Q_0 Y)^{\pi_0^S Y / 2^s \pi_0^S Y} .$$

2.3. Constructions hyperquadratiques et foncteurs R_s .

Le lien entre les parties 1 et 2 de cette note est le suivant. Une bijection entre $(\mathbf{Z}/2)^s$ et $\{1,2,\ldots,2^s\}$ détermine une "diagonale de Steenrod" :

$$\Delta_s : (B(\mathbf{Z}/2)^s)_+ \wedge Y \longrightarrow \mathfrak{S}_{2^s} Y$$

$(B(\mathbf{Z}/2)^s$ est un classifiant pour le groupe $(\mathbf{Z}/2)^s)$ dont la classe d'homotopie ne dépend pas du choix de cette bijection.

On vérifie que l'image de $\Delta_s^* : \widetilde{H}^* \mathfrak{S}_{2^s} Y \to (H^*(\mathbf{Z}/2)^s) \otimes \widetilde{H}^* Y$ est le sous-espace $R_s \widetilde{H}^* Y$ défini en 1.2.2. En particulier, si y est une classe de $\widetilde{H}^* Y$ et $\Gamma_{2^s} y$ la 2^s-ème puissance externe de Steenrod appartenant à $\widetilde{H}^* \mathfrak{S}_{2^s} Y$ ([15]), alors $\Delta_s^* \Gamma_{2^s} y$ est l'élément que l'on a noté $St_s(y)$.

Le théorème 1.2.3 donne donc une relation entre d'une part les foncteurs dérivés D_s de la déstabilisation et d'autre part les constructions "hyperquadratiques" $\widetilde{\mathfrak{G}}_{2^s} Y$.

2.4. <u>Invariants de Hopf</u> "<u>au niveau</u> E_∞ ".

Soit $\{X,Y\} = F^0 \supset F^1 \supset \dots \supset F^s \supset \dots$ la filtration d'Adams de $\{X,Y\}$ relative à la cohomologie modulo 2.

<u>PROPOSITION 2.4. Soit</u> f <u>un élément de</u> $\{X,Y\}$ <u>de filtration</u> $\geq s$ <u>que l'on identifie à un élément</u> $\tilde{f}$ <u>de</u> $[X,QY]$. <u>On considère la composition</u> :

$$\tilde{H}^* \widetilde{\mathfrak{G}}_m Y \xrightarrow{r_m^*} \tilde{H}^* QY \xrightarrow{\tilde{f}^*} \tilde{H}^* X .$$

(i) <u>Si</u> $m < 2^s$, <u>cette composition est nulle</u>.

(ii) <u>Si</u> $m = 2^s$, <u>elle se factorise à travers</u> $R_s \tilde{H}^* Y$. (uniquely, since $\tilde{H}^* G_{2^s} Y \twoheadrightarrow R_s \tilde{H}^* Y$)

Il résulte de cette proposition que l'application $\mathfrak{H}$ induit, pour tout $s \geq 0$, une application : $\mathfrak{H}_\infty^s : F^s/F^{s+1} \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(R_s \tilde{H}^* Y, \tilde{H}^* X)$ (là, $\mathfrak{H}_\infty^s$ est pour Hopf).

2.5. <u>Invariants de Hopf</u> "<u>au niveau</u> E_2 ".

D'autre part, l'algèbre homologique fournit une application :

$$\mathfrak{H}_2^s : \mathrm{Ext}_A^s(\Sigma^{-s}\tilde{H}^* Y, \tilde{H}^* X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(R_s \tilde{H}^* Y, \tilde{H}^* X)$$

qui est la composition des applications suivantes :

- l'application : $\mathrm{Ext}_A^s(\Sigma^{-s}\tilde{H}^* Y, \tilde{H}^* X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(D_s \Sigma^{-s}\tilde{H}^* Y, \tilde{H}^* X)$ adjointe du cap-produit considéré en 1.2.1 (avec $s = s'$ et $M_3 = \mathbb{Z}/2$) ;
- l'application : $\mathrm{Hom}_A(D_s \Sigma^{-s}\tilde{H}^* Y, \tilde{H}^* X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(R_s \tilde{H}^* Y, \tilde{H}^* X)$ induite par l'inclusion de $R_s \tilde{H}^* Y$ dans $D_s \Sigma^{-s}\tilde{H}^* Y$ (voir 1.2.4).

2.6. *Compatibilité des applications* $\aleph_\infty^s$ *et* $\aleph_2^s$.

Les groupes $\mathrm{Ext}_A^s(\Sigma^{-s}\tilde{H}^*Y, \tilde{H}^*X)$ et F^s/F^{s+1} sont respectivement les termes $E_2^{s,s}$ et $E_\infty^{s,s}$ de la suite spectrale d'Adams pour les groupes $\{S^*X, Y\}$ relative à la cohomologie modulo 2. Notre résultat est le suivant.

THEOREME 2.6. *Pour tout* s, *les applications* $\aleph_2^s$ *et* $\aleph_\infty^s$ *sont compatibles. Plus précisément, soit* $Z_2^{s,s}$ *l'image réciproque de* $E_\infty^{s,s}$ *dans* $E_2^{s,s}$ *(*$Z_2^{s,s}$ *est contenu dans le sous-espace, noté* $\bar{Z}_2^{s,s}$, *des cycles permanents et coïncide avec celui-ci si la suite spectrale d'Adams est convergente) ; alors, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
 & E_\infty^{s,s} \arrow[dr, "\aleph_\infty^s"] & \\
Z_2^{s,s} \arrow[ur] \arrow[r, hook] & \bar{Z}_2^{s,s} \arrow[d, hook] & \mathrm{Hom}_A(R_s\tilde{H}^*Y, \tilde{H}^*X) \\
 & E_2^{s,s} \arrow[ur, "\aleph_2^s"'] &
\end{tikzcd}$$

2.7. *Exemples.*

2.7.1. *La conjecture de Segal pour le groupe* $\mathbb{Z}/2$.

On prend $X = \mathbb{R}P_+^\infty$ et $Y = S^0$. On note J l'idéal de l'augmentation modulo 2 de l'anneau de Burnside du groupe $\mathbb{Z}/2$.

On vérifie que la composition $J^s/J^{s+1} \longrightarrow E_\infty^{s,s} \xrightarrow{\aleph_\infty^s} \mathrm{Hom}_A(L_s, P)$ est un isomorphisme, ce qui montre que J^s/J^{s+1} est facteur direct dans $E_\infty^{s,s}$.

D'autre part, comme on l'a vu en 1.3.5.2, $\aleph_2^s$ est un isomorphisme ; on déduit alors du théorème 2.6 que les cinq groupes $E_2^{s,s}$, $E_\infty^{s,s}$, $Z_2^{s,s}$, $\bar{Z}_2^{s,s}$ et J^s/J^{s+1} coïncident et que l'application $\aleph_\infty^s$ est aussi un isomorphisme. L'isomorphisme $J^s/J^{s+1} \simeq E_\infty^{s,s}$ implique la conjecture de Segal pour le groupe $\mathbb{Z}/2$ ([7][5])

2.7.2 L'image réciproque des classes de Kervaire par l'application $G \to G/TOP$.

On prend cette fois-ci pour X la réunion d'une variété différentiable fermée de dimension $2n$ et d'un point base, et S^0 pour Y .

On retrouve à l'aide de la théorie esquissée ci-dessus et de la proposition 1.3.3. le résultat suivant dû à G. Brumfiel, I. Madsen et R.J. Milgram [4] .

THEOREME 2.7.2. L'image réciproque de la classe de Kervaire k_{2n} par l'application $G \to G/TOP$ est non nulle si et seulement si $n+1$ est une puissance de 2 .

REFERENCES

[1] M.G. BARRATT et P.J. ECCLES, Γ^+-structures I, II, III, Topology, vol. 13 (1974), 25-45, 113-126, 199-207.

[2] E.H. BROWN, Jr et S. GITLER, A spectrum whose cohomology is a certain cyclic module over the Steenrod algebra, Topology 12 (1973), 283-295.

[3] E.H. BROWN, Jr et F.P. PETERSON, The Brown-Gitler spectrum, $\Omega^2 S^3$, and $n_j \in \pi_{2j}(S)$, preprint.

[4] G. BRUMFIEL, I. MADSEN et R.J. MILGRAM, PL characteristic classes and cobordism, Ann. of Math. 97 (1972), 82-159.

[5] G. CARLSSON, G.B. Segal Burnside ring conjecture for $(\mathbb{Z}/2)^k$, Topology, vol. 22, n° 1 (1983), 83-103.

[6] I.M. JAMES, Reduced product spaces, Ann. of Math. 62 (1955), 170-197.

[7] W.H. LIN, On conjecture of Mahowald, Segal & Sullivan, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 87 (1980), 449-458.

[8] M. MAHOWALD, A new infinite family in ${}_2\pi_*^S$, Topology 16 (1977), 249-254.

[9] W.S. MASSEY & F.P. PETERSON, On the mod 2 cohomology structure of certain fiber spaces, Mem. Amer. Math. Soc. 74 (1967).

[10] H. MILLER, The Sullivan fixed point conjecture and Brown-Gitler spectra, preprint.

[11] J. MILNOR, On the construction FK (lecture notes from Princeton Univ., 1956), publié dans A student's guide, L.M.S. Lecture note series 4, Cambridge University Press 1972.

[12] G. SEGAL, Operations in stable homotopy theory, L.M.S. lecture note serie 11, Cambridge University Press 1974, p. 105-110.

[13] W.M. SINGER, Iterated loop functors and the homology of the Steenrod algebra, Journal of pure and applied algebra 11 (1977), 83-101.

[14] W.M. SINGER, The construction of certain algebras over the Steenrod algebra, Journal of pure and applied algebra 11 (1977), 53-59.

[15] N. STEENROD and D.B.A. EPSTEIN, Cohomology operations, Princeton University Press, Princeton NJ, 1962.

[16] P. VOGEL, Cobordisme d'immersions, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 7, fasc. 3 (1974), 317-358.

Jean LANNES

Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
Route de Saclay

F - 91128 PALAISEAU cedex

Saïd ZARATI

Université Paris-Sud
Mathématiques, bâtiment 425

F - 91405 ORSAY cedex